

МОСКОВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА

«Сборник задач по геометрии для подготовки к ЕГЭ».

Студента

4 курса д/о

Русинова А.

Введение.

Данное пособие поделено на 2 части по пять задач в каждой части. В первой части представлены комбинационные задачи по разделу “планиметрия”. Вторая часть посвящена “стереометрии”.

Все задачи давались ученикам при проведении ЕГЭ за прошедшие годы, а так же опубликованы в демонстрационных вариантах ЕГЭ.

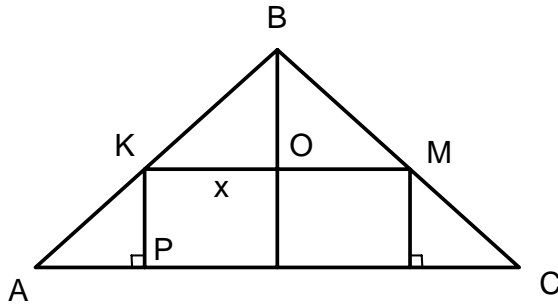
Данный материал может быть использован как для подготовки учеников к решению е ЕГЭ, так и при проведении итоговой контрольной работы по геометрии.

При проведении итоговой контрольной работы ученикам предлагается решить по одной задаче из каждого раздела (при проведении контрольной работы в течение 45 минут). При затруднении решения задачи ученик может поменять одно задание со снижением половины балла.

Раздел I.

Задача 1.1.

В равнобедренный треугольник с углом α при основании вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две другие — на сторонах треугольника. При каком отношении сторон прямоугольника его площадь будет наибольшей?



Решение.

В задаче нет линейных данных, поэтому в качестве вспомогательной величины введем a , обозначив ею половину основания равнобедренного треугольника, а переменной x обозначим половину стороны прямоугольника, лежащей на основании треугольника.

Выразим вторую сторону прямоугольника через a , x и α : $KP = (a - x) \operatorname{tg} \alpha$.

Составим функцию площади прямоугольника: $S(x) = 2x(a - x) \operatorname{tg} \alpha$ или $S(x) = 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot x(a - x)$.

Так как $2 \operatorname{tg} \alpha$ — величина постоянная, введем функцию $f(x) = x(a - x)$ и исследуем ее на наибольшее значение.

По свойству квадратичной функции точкой наибольшего значения является точка $x = \frac{a}{2}$.

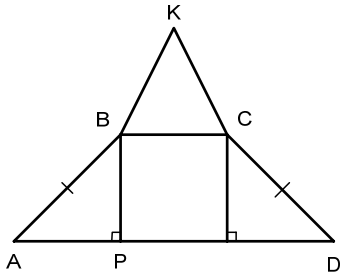
Выразим стороны прямоугольника и найдем отношение сторон:

$$KM = a, KP = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha; \frac{KM}{KP} = \frac{a}{\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha}; \frac{KM}{KP} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$.

Задача 2.2.

На меньшем основании равнобедренной трапеции построен равносторонний треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.



Решение.

1. Так как условием задачи связаны площади фигур, а линейных величин не задано, введем вспомогательную линейную величину a , обозначив ею общую сторону BC треугольника и трапеции.

2. Выразим площадь равностороннего треугольника через a : $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

3. По условию высота трапеции равна высоте равностороннего треугольника, а отношение площадей рассматриваемых фигур равно 5. Используя эти данные, составим уравнение и выразим основание AD трапеции через a : $\frac{(a + AD)}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; $a + AD = 5a$; $AD = 4a$.

4. По свойству равнобедренной трапеции: $AP = \frac{(4a - a)}{2} = \frac{3a}{2}$.

5. Из прямоугольного треугольника ABP находим тангенс угла A :

$$\operatorname{tg} A = \frac{BP}{AP}; \operatorname{tg} A = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

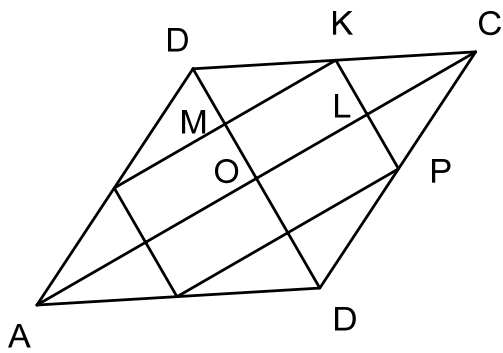
$$\angle A = 30^\circ.$$

Ответ: 30° .

Задача 2.3.

В ромб вписан прямоугольник так, что все его вершины лежат на сторонах ромба, причем большая сторона прямоугольника параллельна большей диагонали ромба. Найти площадь прямоугольника, если его стороны относятся как 1:2, сторона ромба равна 4, острый угол равен 60° .

Решение.



1. Рассмотрим четырехугольник $MKLO$: $MO \perp LO$ по свойству диагоналей ромба, $MK \parallel OL$ по условию, тогда $\angle KMO$ — прямой по свойству внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей. Вывод: в четырехугольнике $MKLO$ три прямых угла, тогда четвертый угол — прямой, то есть $MKLO$ — прямоугольник и $KP \parallel BD$.

2. Так как $KP \parallel BD$, треугольники KCP и BCD подобны. Из подобия треугольников и

свойства ромба с углом 60° имеем: $\frac{x}{4} = \frac{2-x}{4\sqrt{3}}; \frac{x}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; x(2+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}; x = \frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, где x

— меньшая сторона прямоугольника.

3. Найдя меньшую сторону прямоугольника, вычислим его площадь:

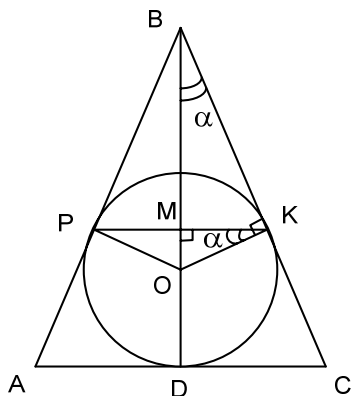
$$S = 2\left(\frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right) = 96(2-\sqrt{3}).$$

Ответ: $96(2-\sqrt{3})$.

Задача 2.4.

В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 10 см, и основанием, равным 6 см, вписана окружность. Найти расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами треугольника.

Решение.



1. Рассмотрим $\triangle ABC$ (равнобедренный, $BC = 10$, $AC = 6$, BD — высота, проведенная к основанию): $DC = 3$, $BD = \sqrt{100 - 9} = \sqrt{91}$, $S = 3\sqrt{91}$.

Имеем периметр: $P = 10 + 10 + 6 = 26$, $S = 3\sqrt{91}$, тогда $r = \frac{2 \cdot 3\sqrt{91}}{26} = \frac{3\sqrt{91}}{13}$.

2. Из $\triangle DBC$: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$.

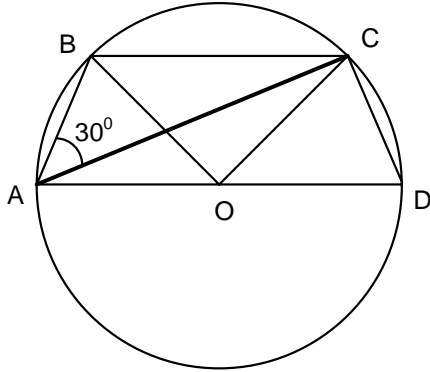
3. $\triangle MKO$: $OK = \frac{3\sqrt{91}}{13}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$, $\angle OMK$ — прямой (в силу симметрии комбинации фигур относительно прямой BD и, как следствие, симметричности точек P и K относительно BD). Тогда $MK = \frac{3\sqrt{91} \cdot \sqrt{91}}{13 \cdot 10} = \frac{21}{10}$; $KP = \frac{21}{10} \cdot 2 = 4,2$ см.

Ответ: 4,2 см.

Задача 2.5.

Трапеция $ABCD$ (AD и BC — основания) вписана в окружность, радиус которой равен 4 см; AC — биссектриса угла A , угол BAC равен 30° . Найти площадь трапеции.

Решение.



1. Рассмотрим трапецию $ABCD$: $\angle BAC = 30^\circ$, AC — биссектриса $\angle BAD$, тогда $\angle BAD = 60^\circ$, а $\angle ABC = 120^\circ$ (сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°).

2. $\angle BAC = \angle CAD$ (по свойству биссектрисы); $\angle CAD = \angle BCA$ (свойство внутренних накрест лежащих углов при параллельных и секущей); тогда $\angle BAC = \angle BCA$ (свойство транзитивности отношения равенства). Вывод: $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC .

3. $\angle BCA = \angle BAC = 30^\circ$, тогда $\angle ACD = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, то есть центр окружности является серединой AD .

4. Площадь трапеции в данном случае равна утроенной площади $\triangle ABO$ (треугольники ABO , BOC и OCD — равносторонние, сторона равна радиусу окружности).

$$S = 3 \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$ см.

Раздел II.

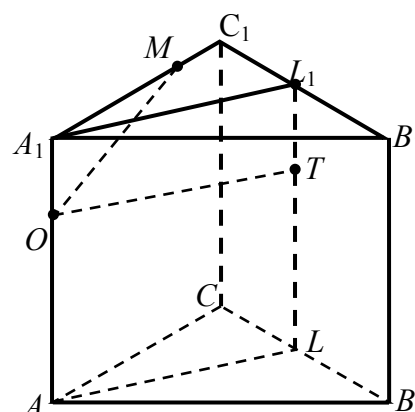
Задача 2.1.

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1 , BB_1 и CC_1 – боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1 , пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1 . Известно, что $AB = 12$, $A_1M : MC_1 = 3 : 1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение:

Так как призма правильная, то прямая $AA_1 \perp ABC$. По условию центр O сферы лежит на ребре AA_1 и поэтому, по свойству плоскости, касательной к сфере, сфера с центром в точке O касается плоскости ABC в точке A . Значит, OA – радиус сферы.

Пусть L и L_1 – середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Так как треугольник ABC – правильный, то $AL \perp BC$. А так как $AA_1 \perp BC$, то $BC \perp AA_1L$, т.е. плоскости CBB_1 и ALL_1



перпендикулярны. Пусть T – точка касания сферы с плоскостью CBB_1 . Тогда OT – радиус сферы, $OT \perp CBB_1$, значит, OT лежит в плоскости ALL_1 . Тогда $OT \parallel AL$, а так как $AA_1 \parallel LL_1$, то $OT = AL$. Отсюда

$$OT = OA = AL = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ как высота правильного треугольника, со стороной } 12.$$

Точка M лежит на сфере. Поэтому $OM = OT = 6\sqrt{3}$. По условию $MA_1 = \frac{3}{4}AB$. Тогда

$$MA_1 = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9. \quad \text{Из прямоугольного треугольника } OMA_1 \text{ находим}$$

$$OA_1 = \sqrt{OM^2 - MA_1^2} = \sqrt{108 - 81} = 3\sqrt{3}. \quad \text{Отсюда находим высоту призмы:}$$

$$h = AO + OA_1 = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

Площадь S боковой поверхности призмы найдем по формуле $S = 3ABh$. Отсюда $S = 3 \cdot 12 \cdot 9\sqrt{3} = 324\sqrt{3}$.

Ответ: $324\sqrt{3}$.

Задача 2.2.

Основанием пирамиды $FABC$ является треугольник ABC , в котором $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC . Найдите объем пирамиды $AMLC$.

Решение.

1) Объем пирамиды $AMLC$ вычислим по формуле

$V_{AMLC} = \frac{1}{3} S_{CLM} h$, где h – высота пирамиды. По условию

$FA \perp ABC$. Значит, $FA \perp BC$. Но $AB \perp BC$, следовательно, $BC \perp ABF$ и поэтому $AM \perp BC$.

Значит, AM – высота пирамиды $AMLC$, опущенная на плоскость грани CLM , т.е. $h = AM$. Из прямоугольного треугольника ABF :

$$h = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

2) Треугольники CLM и CFM имеют общую высоту, проведенную из

вершины M . Поэтому $\frac{S_{CLM}}{S_{CFM}} = \frac{CL}{CF}$. Аналогично, $\frac{S_{CFM}}{S_{CFB}} = \frac{FM}{BF}$. Следовательно,

$$\frac{S_{CLM}}{S_{CFB}} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF}. \text{ Отсюда } S_{CLM} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF} \cdot S_{CFB}.$$

3) Отрезки CF и CL , BF и FM найдем соответственно из прямоугольных треугольников

ACF и ABF . Имеем $CF = \sqrt{AF^2 + AC^2} = \sqrt{41}$, $CL = \frac{AC^2}{FC} = \frac{25}{\sqrt{41}}$,

$$BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = 5, \quad FM = \frac{AF^2}{BF} = \frac{16}{5}.$$

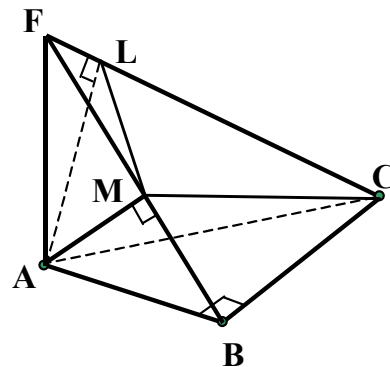
4) Поскольку $BC \perp ABF$, то $BC \perp BF$. Поэтому площадь треугольника CFB найдем по

$$\text{формуле } S_{CFB} = \frac{FB \cdot BC}{2} = 10.$$

Вычислим площадь основания пирамиды $AMLC$:

$$S_{CLM} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF} \cdot S_{CFB} = \frac{25}{\sqrt{41}} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{160}{41}.$$

$$\text{Искомый объем } V_{AMLC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{160}{41} \cdot \frac{12}{5} = \frac{128}{41}.$$



Ответ: $\frac{128}{41}$.

Второй способ.

1) Объем пирамиды $AMLC$ вычислим по формуле $V_{AMLC} = \frac{1}{3} S_{ALC} h_M$, где h_M - расстояние от вершины M до плоскости FAC . Так как $FA \perp AC$ и $AL \perp FC$, то

$$S_{FAC} = \frac{AF \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = 10 \text{ и } AL = \frac{AF \cdot AC}{FC} = \frac{20}{\sqrt{41}}.$$

Следовательно,

$$LC = \sqrt{25 - \frac{400}{41}} = \frac{25}{\sqrt{41}} \text{ и } S_{ALC} = \frac{AL \cdot LC}{2} = \frac{250}{41}.$$

2) Проведем высоту h_B прямоугольного треугольника ABC , $h_B \perp AC$. Так как $AF \perp ABC$, то $h_B \perp AF$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $h_B \perp FAC$. Поэтому h_B - расстояние от вершины B до плоскости FAC .

3) Итак, $h_B = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$. Перпендикуляры BK и MP , опущенные на плоскость FAC из точек B и M , параллельны между собой и лежат в плоскости, содержащей прямую BF . Поэтому треугольники FBK и FMP подобны. Отсюда $\frac{BF}{MF} = \frac{BK}{MP} = \frac{h_B}{h_M}$.

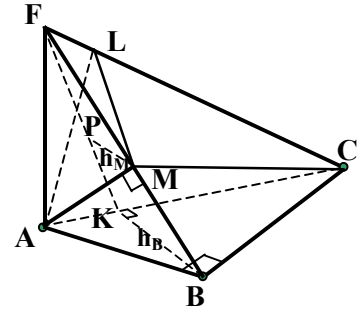
$$\text{Поэтому } h_M = \frac{12}{5} \cdot \frac{MF}{BF}.$$

4) Из прямоугольного треугольника FAB : $BF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ и $AM = \frac{AF \cdot AB}{BF} = \frac{12}{5}$.

Из прямоугольного треугольника FAM : $MF = \sqrt{16 - \frac{144}{25}} = \frac{16}{5}$. Следовательно,

$$h_M = \frac{12}{5} \cdot \frac{16}{5 \cdot 5} \text{ и } V_{AMLC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 16}{125} \cdot \frac{250}{41} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 2}{41} = \frac{128}{41}.$$

Ответ: $\frac{128}{41}$.

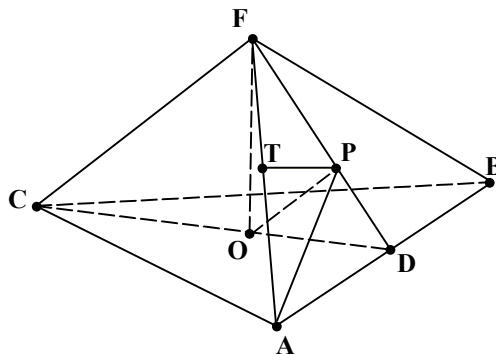


Задача 2.3.

Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение:

1) Пусть пирамида $FABC$ – данная правильная пирамида, FO – ее высота, тогда точка O – центр треугольника ABC . Пусть CD – медиана треугольника ABC , тогда $O \in CD$ и $CO:OD = 2:1$. Треугольник FAB равнобедренный и точка D – середина AB , значит, FD – медиана, высота и биссектриса треугольника FAB .



Пусть основание конуса вписано в треугольник FAB . Тогда центр основания конуса (точка P) является точкой пересечения биссектрис треугольника FAB . Следовательно, OP – высота конуса, PD – радиус основания, а OD – образующая конуса. Тогда $OP \perp FD$.

2) Пусть $PT \perp FA$. Тогда $PT = PD$ как радиусы окружности, вписанной в треугольник FAB . Прямоугольные треугольники FDA и FTP

подобны (имеют общий угол при вершине F). Следовательно, $\frac{FA}{FP} = \frac{AD}{PT}$ или

$$\frac{FA}{AD} = \frac{FP}{PD}, \quad \text{так как } PT = PD. \quad \text{Отсюда} \quad \frac{FA + AD}{AD} = \frac{FP + PD}{PD},$$

т.е. $PD = \frac{AD \cdot FD}{FA + AD}$. Вычислим PD другим способом. Прямоугольные треугольники

FOD и OPD подобны, так как имеют общий угол D . Поэтому $\frac{PD}{OD} = \frac{OD}{FD}$ и $PD = \frac{OD^2}{FD}$.

Итак, $\frac{AD \cdot FD}{FA + AD} = \frac{OD^2}{FD}$ (1).

3) По условию $AB = 2\sqrt{7}$. Пусть $AF = b$ и $PD = r$. Из треугольника FAD получаем

$$FD = \sqrt{b^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{b^2 - 7}, \quad \text{а из треугольника } ABC \text{ получаем } CD = \sqrt{21},$$

$$OD = \frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}\sqrt{21}. \quad \text{Подставим найденные величины в равенство (1):}$$

$$\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{b^2 - 7}}{b + \sqrt{7}} = \frac{7}{3\sqrt{b^2 - 7}}. \quad \text{Отсюда получаем: } 3(b - \sqrt{7}) = \sqrt{7}. \quad \text{Следовательно,}$$

$$b = \frac{4\sqrt{7}}{3} \quad \text{и} \quad r = \frac{7}{3\sqrt{b^2 - 7}} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{16 \cdot 7}{9} - 7}} = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 2.4.

Дано:

ABCD - правильный тетраэдр,

AC=12,

DS=SC,

BK=KC,

S-вершина конуса,

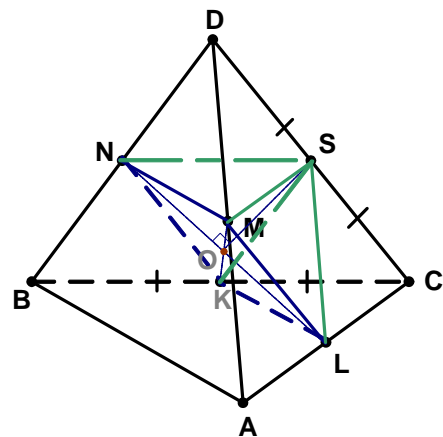
Основание конуса вписанно в α ,

α – сечение тетраэдра,

$\alpha \parallel CD$,

$\alpha \parallel AB$,

$\alpha \cap BC = K$.



Найти:

$V_{\text{конуса}}$.

Решение.

$KN \parallel CD$ (т.к. $\alpha \parallel CD$ и находятся в одной грани);

Отметим точку N на BD;

Проведем $NM \parallel AB$ (т.к. $\alpha \parallel AB$ и находятся в одной грани);

Отметим точку M на AD;

$ML \parallel CD$ (т.к. $\alpha \parallel CD$ и находятся в одной грани);

Отметим точку L на AC;

Проведем отрезок ML. Т.о. плоскость NMLK - искомая.

2. Рассмотрим NMLK:

а) $KL = NM = \frac{1}{2}BA$, $ML = NK = \frac{1}{2}DC$, но т.к. $DC=BA$ (св-во правильного тетраэдра), то

$KL=NM=ML=NK = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (исп. Теорему Фалеса).

б) $NM \parallel KL$ и $KN \parallel ML$ (по построению) \rightarrow NMLK – ромб.

CM – медиана и высота (т.к. ADC - равносторонний треугольник).

$BA \perp CP$,

CP – проекция DC на (ABC).

След-но $BA \perp DC$ (по теореме о 3-х перпендикулярах).

Т.к. $BA \parallel NM$ и $DC \parallel NK$, то $NM \perp NK$. Следовательно $NMLK$ – квадрат.

Сделаем дополнительные построения.

Построим пирамиду $NMLKS$. У которой $NS=SL=LK=KN=6$ (т.к. являются средними линиями соответствующих равных треугольников BKD, DKA, KAB, BKA).

Найдем высоту: $h = \sqrt{SL^2 - \left(\frac{LN}{2}\right)^2}$, где $LN = a\sqrt{2}$.

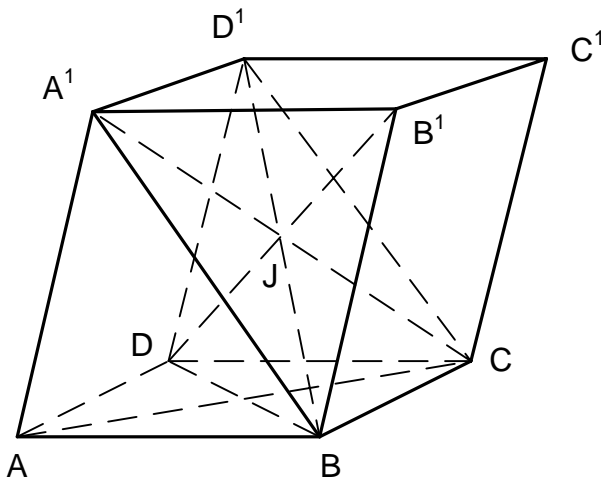
$$h = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{4} - \frac{72}{4}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Найдем радиус, вписанной в квадрат $NMLK$ окружности: $r = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}6 = 3$.

Найдем $V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 3\sqrt{2} = 9\pi\sqrt{2}$.

Задача 2.5.

Все грани параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — равные ромбы. Углы BAD, BAA_1 и DAA_1 равны по 60° . Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1 .



Решение. Все ребра данного параллелепипеда равны между собой, и так как его грани — ромбы с углом 60° , то меньшая диагональ в каждом ромбе равна его стороне. Отсюда следует, что $DBB_1 D_1$ — ромб.

Рассмотрим отрезок A_1J , где J — точка пересечения диагоналей ромба DBB_1D_1 . Треугольник DA_1B_1 равнобедренный, следовательно, медиана A_1J треугольника DA_1B_1 является его высотой, то есть $A_1J \perp DB_1$. Аналогично, $A_1J \perp D_1B$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $A_1J \perp D_1BB_1$. Отсюда, угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1 есть $\angle A_1BD_1$.

$A_1D = A_1B$, следовательно, $JD = DB$, как проекции равных наклонных. Отсюда следует, что $DB_1 = BD_1$. Итак, диагонали в ромбе DBB_1D_1 равны. Значит, ромб D_1DBB_1 — квадрат.

Треугольники BA_1D_1 и BDD_1 равны по трем сторонам, так как $BA_1 = BD$, $A_1D_1 = DD_1$ и DB_1 — их общая сторона. Отсюда $\angle A_1BD_1 = \angle DBD_1 = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

Использованная литература.

1. Рязановский А.Р., Мирошин В.В. Математика. Решение задач повышенной сложности. М. Интеллект-Центр, 2008. Из серии: Готовимся к ЕГЭ.
2. Креславская О.А. Математика: Сдаем без проблем! М.: Эксмо, 2008.
3. www.ege.edu.ru - Демонстрационные варианты ЕГЭ за 2004, 2005, 2007, 2007 годы.