МОСКОВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТВОРЧЕСКАЯ РАБОТА

«**Сборник задач по геометрии для подготовки к ЕГЭ**».

Студента

4 курса д/о

Русинова А.

Введение.

Данное пособие поделено на 2 части по пять задач в каждой части. В первой части представлены комбинационные задачи по разделу “планиметрия”. Вторая часть посвящена “стереометрии”.

Все задачи давались ученикам при проведении ЕГЭ за прошедшие годы, а так же опубликованы в демонстрационных вариантах ЕГЭ.

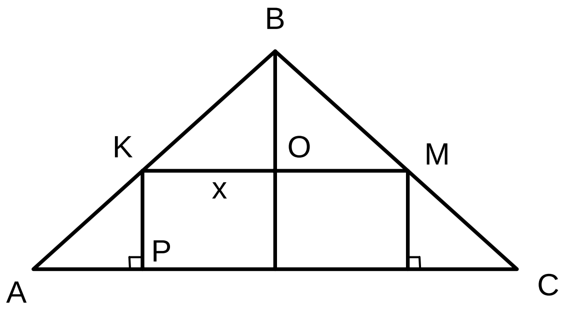
Данный материал может быть использован как для подготовки учеников к решению е ЕГЭ, так и при проведении итоговой контрольной работы по геометрии.

При проведении итоговой контрольной работы ученикам предлагается решить по одной задаче из каждого раздела (при проведении контрольной работы в течение 45 минут). При затруднении решения задачи ученик может поменять одно задание со снижением половины балла.

Раздел I.

Задача 1.1.

В равнобедренный треугольник с углом а при основании вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две другие — на сторонах треугольника При каком отношении сторон прямоугольника его площадь будет наибольшей?



Решение.

В задаче нет линейных данных, поэтому в качестве вспомогательной величины введем *a,* обозначив ею половину основания равнобедренного треугольника, а переменной *x* обозначим половину стороны прямоугольника, лежащей на основании треугольника.

Выразим вторую сторону прямоугольника через *a, x* и α: *KP = (a - x)* tg α.

Составим функцию площади прямоугольника: *S(x) = 2x(a* - x)tg α или S(x) = 2tg a • x(a - x).

Так как 2tg α—величина постоянная, введем функцию *f(x) = x(a - x)* и исследуем ее на наибольшее значение.

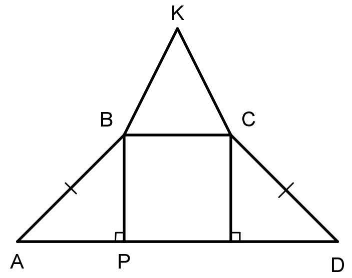
По свойству квадратичной функции точкой наибольшеего значения является точка $x = \frac{a}{2}$.

Выразим стороны прямоугольника и найдем отношение сторон: $KM = a, KP = \frac{a}{2}tg\alpha; \frac{KM}{KP} = \frac{a}{\frac{a}{2}tg\alpha}; \frac{KM}{KP} = \frac{2}{tg\alpha}.$

Ответ: $\frac{2}{tg\alpha}$.

Задача 2.2.

На меньшем основании равнобедренной трапеции построен равносторонний треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше площади трапеции. Найти угол при большем основании трапеции.



Решение.

1. Так как условием задачи связаны площади фигур, а линейных величин не задано, введем вспомогательную линейную величину *a,* обозначив ею общую сторону *BC* треугольника и трапеции.

2. Выразим площадь равностороннего треугольника через а: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

3. По условию высота трапеции равна высоте равностороннего треугольника, а отношение площадей рассматриваемых фигур равно 5. Используя эти данные, составим уравнение и выразим основание *AD* трапеции через *a:* $\frac{(a + AD)}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\frac{a^2\sqrt{3}}{4}; a + AD = 5a; AD = 4a.$

4. По свойству равнобедренной трапеции: $AP = \frac{(4a - a)}{2} = \frac{3a}{2}$.

5. Из прямоугольного треугольника *ABP* находим тангенс угла А: $tgA = \frac{BP}{AP}; tgA = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

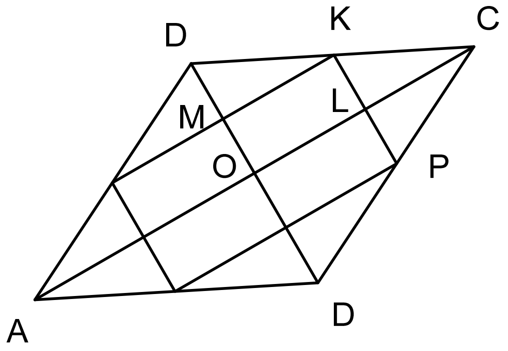
$\angle A = 30^0.$

Ответ: 30^0.

Задача 2.3.

В ромб вписан прямоугольник так, что все его вершины лежат на сторонах ромба, причем большая сторона прямоугольника параллельна большей диагонали ромба. Найти площадь прямоугольника, если его стороны относятся как 1:2, сторона ромба равна 4, острый угол равен 60°.

Решение.



1. Рассмотрим четырехугольник *MKLO: MO* $\perp$ *LO* по свойству диагоналей ромба, *MK* || *OL* по условию, тогда $\angle KMO$ — прямой по свойству внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей. Вывод: в четырехугольнике *MKLO* три прямых угла, тогда четвертый угол — прямой, то есть *MKLO* — прямоугольник и *KP* || *BD.*

2. Так как *KP* || *BD,* треугольники *KCP* и *BCD* подобны. Из подобия треугольников и свойства ромба с углом 60° имеем: $\frac{x}{4} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{2-x}}{\frac{4\sqrt{3}}{2}}; \frac{x}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}; x(2+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}; x = \frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, где x — меньшая сторона прямоугольника.

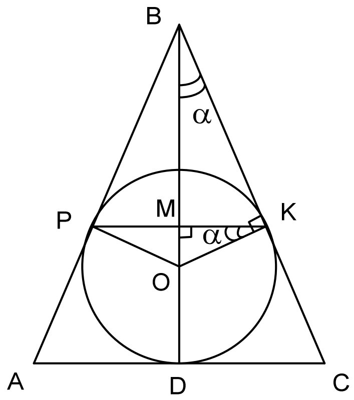
3. Найдя меньшую сторону прямоугольника, вычислим его площадь: $S = 2(\frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}) = 96(2-\sqrt{3}).$

Ответ: $96(2-\sqrt{3}).$

Задача 2.4.

В равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 10 см, и основанием, равным 6 см, вписана окружность. Найти расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами треугольника.

Решение.



1. Рассмотрим ΔABC (равнобедренный, BC = 10, AC = 6, BD — высота, проведенная к основанию): DC = 3, $BD = \sqrt{100-9} = \sqrt{91}, S = 3\sqrt{91}$.

Имеем периметр: P = 10 + 10 + 6 = 26, $S = 3\sqrt{91}$, тогда $r = \frac{2 \cdot 3\sqrt{91}}{26} = \frac{3\sqrt{91}}{13}$.

2. Из ΔDBC: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$.

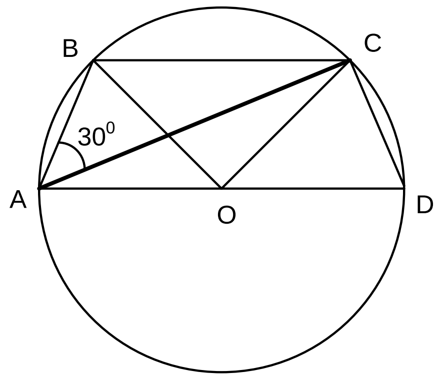
3. ΔMKO*:* $OK = \frac{3\sqrt{91}}{13}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}, \angle OMK -$ прямой (в силу симметрии комбинации фигур относительно прямой *BD* и, как следствие, симметричности точек *P* и *K* относительно *BD*). Тогда $MK = \frac{3\sqrt{91} \cdot \sqrt{91}}{13 \cdot 10} = \frac{21}{10}; KP = \frac{21}{10} \cdot 2 = 4{,}2$ *см.*

Ответ: 4,2 *см.*

Задача 2.5.

Трапеция *ABCD* (*AD* и *BC* — основания) вписана в окружность, радиус которой равен 4 см; AC — биссектриса угла A, угол *BAC* равен 30° . Найти площадь трапеции.

Решение.



1. Рассмотрим трапецию *ABCD:* $\angle BAC = 30°$, *AC* — биссектриса $\angle BAD$, тогда $\angle BAD = 60°$, а $\angle ABC = 120°$ (сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°).

2. $\angle BAC = \angle CAD$ (по свойству биссектрисы); $\angle CAD = \angle BCA$ (свойство внутренних накрест лежащих углов при параллельных и секущей); тогда $\angle BAC = \angle BCA$ (свойство транзитивности отношения равенства). Вывод: ΔABC — равнобедренный с основанием *AC.*

3. $\angle BCA = \angle BAC = 30°$, тогда $\angle ACD$ - 120° - 30° = 90°, то есть центр окружности является серединой *AD.*

4. Площадь трапеции в данном случае равна утроенной площади ΔABO (треугольники *ABO, BOC* и *OCD* — равносторонние, сторона равна радиусу окружности). $S = 3\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$

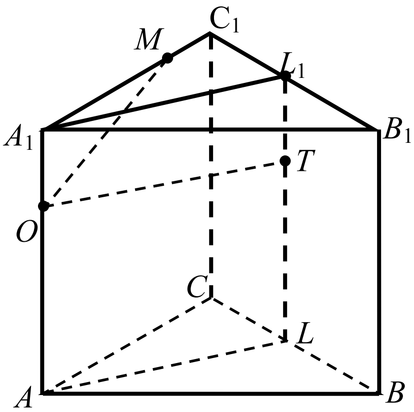
Ответ: $12\sqrt{3}$ см.

Раздел II.

Задача 2.1.

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 – боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и плоскости CBB_1. Известно, что AB = 12, $A_1M : MC_1 = 3 : 1$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение:



Так как призма правильная, то прямая $AA_1 \perp ABC$. По условию центр O сферы лежит на ребре AA_1 и поэтому, по свойству плоскости, касательной к сфере, сфера с центром в точке O касается плоскости ABC в точке A. Значит, OA – радиус сферы.
Пусть L и L_1 – середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Так как треугольник ABC – правильный, то $AL \perp BC$. А так как $AA_1 \perp BC$, то $BC \perp AA_1L$, т.е. плоскости CBB_1 и ALL_1 перпендикулярны. Пусть T – точка касания сферы с плоскостью CBB_1. Тогда OT – радиус сферы, $OT \perp CBB_1$, значит, OT лежит в плоскости ALL_1. Тогда $OT \parallel AL$, а так как $AA_1 \parallel LL_1$, то $OT = AL$. Отсюда $OT = OA = AL = \dfrac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ как высота правильного треугольника, со стороной 12.

Точка M лежит на сфере. Поэтому $OM = OT = 6\sqrt{3}$. По условию $MA_1 = \dfrac{3}{4}AB$. Тогда $MA_1 = \dfrac{3}{4}\cdot 12 = 9$. Из прямоугольного треугольника OMA_1 находим $OA_1 = \sqrt{OM^2 - MA_1^2} = \sqrt{108 - 81} = 3\sqrt{3}$. Отсюда находим высоту призмы: $h = AO + OA_1 = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

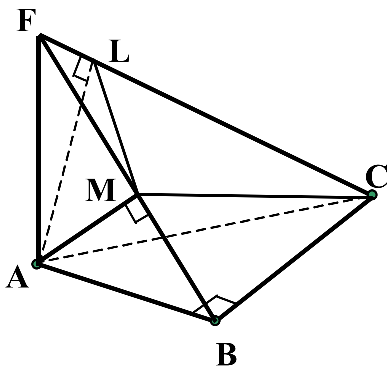
Площадь S боковой поверхности призмы найдем по формуле $S = 3AB\cdot h$. Отсюда $S = 3\cdot 12\cdot 9\sqrt{3} = 324\sqrt{3}$.

Ответ: $324\sqrt{3}$.

Задача 2.2.

Основанием пирамиды FABC является треугольник ABC, в котором $\angle ABC = 90°$, AB = 3, BC = 4. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объем пирамиды $AMLC$.

Решение.



1) Объем пирамиды $AMLC$ вычислим по формуле $V_{AMLC} = \frac{1}{3} S_{CLM} h$, где h – высота пирамиды. По условию FA⊥ABC. Значит, FA⊥BC. Но AB ⊥ BC, следовательно, BC⊥ABF и поэтому AM⊥BC. Значит, AM – высота пирамиды $AMLC$, опущенная на плоскость грани CLM, т.е. $h = AM$. Из прямоугольного треугольника ABF: $h = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$.

2) Треугольники CLM и CFM имеют общую высоту, проведенную из вершины M. Поэтому $\frac{S_{CLM}}{S_{CFM}} = \frac{CL}{CF}$. Аналогично, $\frac{S_{CFM}}{S_{CFB}} = \frac{FM}{BF}$. Следовательно, $\frac{S_{CLM}}{S_{CFB}} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF}$. Отсюда $S_{CLM} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF} \cdot S_{CFB}$.

3) Отрезки CF и CL, BF и FM найдем соответственно из прямоугольных треугольников ACF и ABF. Имеем $CF = \sqrt{AF^2 + AC^2} = \sqrt{41}$, $CL = \frac{AC^2}{FC} = \frac{25}{\sqrt{41}}$,

$BF = \sqrt{AB^2 + AF^2} = 5$, $FM = \frac{AF^2}{BF} = \frac{16}{5}$.

4) Поскольку BC⊥ABF, то BC⊥BF. Поэтому площадь треугольника CFB найдем по формуле $S_{CFB} = \frac{FB \cdot BC}{2} = 10$.

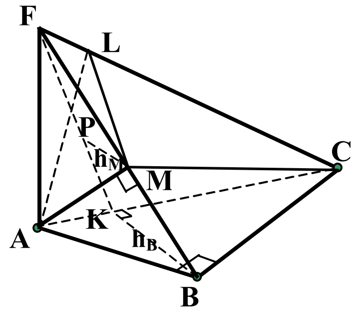
Вычислим площадь основания пирамиды AMLC:

$$S_{CLM} = \frac{CL \cdot FM}{CF \cdot BF} \cdot S_{CFB} = \frac{25}{\sqrt{41}} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \frac{1}{5} \cdot 10 = \frac{160}{41}.$$

Искомый объем $V_{AMLC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{160}{41} \cdot \frac{12}{5} = \frac{128}{41}$.

Ответ: $\frac{128}{41}$.

Второй способ.



1) Объем пирамиды $AMLC$ вычислим по формуле $V_{AMLC} = \frac{1}{3} S_{ALC} h_M$, где h_M - расстояние от вершины M до плоскости FAC. Так как $FA \perp AC$ и $AL \perp FC$, то

$$S_{FAC} = \frac{AF \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}}{2} = 10 \text{ и } AL = \frac{AF \cdot AC}{FC} = \frac{20}{\sqrt{41}}.$$

Следовательно,

$$LC = \sqrt{25 - \frac{400}{41}} = \frac{25}{\sqrt{41}} \text{ и } S_{ALC} = \frac{AL \cdot LC}{2} = \frac{250}{41}.$$

2) Проведем высоту h_B прямоугольного треугольника ABC, $h_B \perp AC$. Так как $AF \perp ABC$, то $h_B \perp AF$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $h_B \perp FAC$. Поэтому h_B - расстояние от вершины B до плоскости FAC.

3) Итак, $h_B = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{12}{5}$. Перпендикуляры BK и MP, опущенные на плоскость FAC из точек B и M, параллельны между собой и лежат в плоскости, содержащей прямую BF. Поэтому треугольники FBK и FMP подобны. Отсюда $\frac{BF}{MF} = \frac{BK}{MP} = \frac{h_B}{h_M}$.

Поэтому $h_M = \frac{12}{5} \cdot \frac{MF}{BF}$.

4) Из прямоугольного треугольника FAB: $BF = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ и $AM = \frac{AF \cdot AB}{BF} = \frac{12}{5}$.

Из прямоугольного треугольника FAM: $MF = \sqrt{16 - \frac{144}{25}} = \frac{16}{5}$. Следовательно,

$$h_M = \frac{12}{5} \cdot \frac{16}{5 \cdot 5} \text{ и } V_{AMLC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{12 \cdot 16}{125} \cdot \frac{250}{41} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 2}{41} = \frac{128}{41}.$$

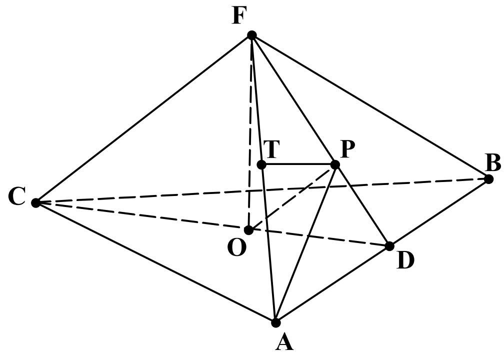
Ответ: $\frac{128}{41}$.

Задача 2.3.

Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

Решение:

1) Пусть пирамида *FABC* – данная правильная пирамида, *FO* – ее высота, тогда точка *O* – центр треугольника *ABC*. Пусть *CD* – медиана треугольника *ABC*, тогда $O \in CD$ и $CO : OD = 2 : 1$. Треугольник *FAB* равнобедренный и точка *D* – середина *AB*, значит, *FD* – медиана, высота и биссектриса треугольника *FAB*.



Пусть основание конуса вписано в треугольник *FAB*. Тогда центр основания конуса (точка *P*) является точкой пересечения биссектрис треугольника *FAB*. Следовательно, *OP* – высота конуса, *PD* – радиус основания, а *OD* – образующая конуса. Тогда $OP \perp FD$.

2) Пусть $PT \perp FA$. Тогда *PT=PD* как радиусы окружности, вписанной в треугольник *FAB*. Прямоугольные треугольники *FDA* и *FTP* подобны (имеют общий угол при вершине *F*). Следовательно, $\dfrac{FA}{FP} = \dfrac{AD}{PT}$ или $\dfrac{FA}{AD} = \dfrac{FP}{PD}$, так как *PT=PD*. Отсюда $\dfrac{FA + AD}{AD} = \dfrac{FP + PD}{PD}$, т.е. $PD = \dfrac{AD \cdot FD}{FA + AD}$. Вычислим *PD* другим способом. Прямоугольные треугольники *FOD* и *OPD* подобны, так как имеют общий угол *D*. Поэтому $\dfrac{PD}{OD} = \dfrac{OD}{FD}$ и $PD = \dfrac{OD^2}{FD}$.

Итак, $\dfrac{AD \cdot FD}{FA + AD} = \dfrac{OD^2}{FD}$ (1).

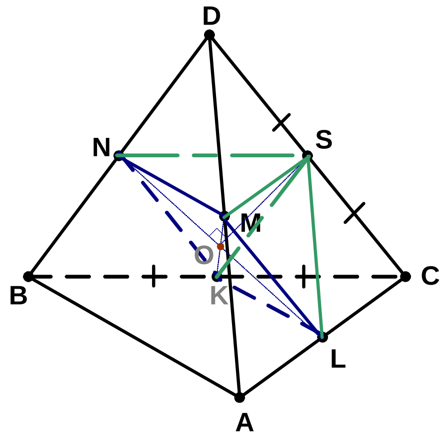
3) По условию $AB = 2\sqrt{7}$. Пусть *AF=b* и *PD = r*. Из треугольника *FAD* получаем $FD = \sqrt{b^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{b^2 - 7}$, а из треугольника *ABC* получаем $CD = \sqrt{21}$, $OD = \dfrac{1}{3}CD = \dfrac{1}{3}\sqrt{21}$. Подставим найденные величины в равенство (1):

$\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{b^2-7}}{b+\sqrt{7}}=\frac{7}{3\sqrt{b^2-7}}$. Отсюда получаем: $3\left(b-\sqrt{7}\right)=\sqrt{7}$. Следовательно, $b=\frac{4\sqrt{7}}{3}$ и $r=\frac{7}{3\sqrt{b^2-7}}=\frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{16\cdot 7}{9}-7}}=1$.

Ответ: 1.

Задача 2.4.

Дано:
ABCD - правильный тетраэдр,
AC=12,
DS=SC,
BK=KC,
S-вершина конуса,
Основание конуса вписанно в α,
α – сечение тетраэдра,
α || CD,
α || AB,
α ∩ BC =K.



Найти:
$V_{\text{конуса.}}$

Решение.
KN || CD (т.к. α || CD и находятся в одной грани);
Отметим точку N на BD;
Проведем NM || AB (т.к. α || AB и находятся в одной грани);
Отметим точку M на AD;
ML || CD (т.к. α || CD и находятся в одной грани);
Отметим точку L на AC;

Проведем отрезок ML. Т.о. плоскость NMLK - искомая.

2. Рассмотрим NMLK:
a) $KL=NM=\frac{1}{2}BA, ML=NK=\frac{1}{2}DC$, но т.к. DC=BA (св-во правильного тетраэдра), то KL=NM=ML=NK=$\frac{1}{2}\cdot 12=6$ (исп. Теорему Фалеса).

b) NM || KL и KN || ML (по построению) → NMKL – ромб.
CM – медиана и высота (т.к. ADC - равносторонний треугольник).
BA ⊥ CP,
CP – проекция DC на (ABC).

След-но BA ⊥ DC (по теореме о 3-х пенпендикулярах).

Т.к. BA || NM и DC || NK, то NM ⊥ NK. Следовательно NMLK – квадрат.

Сделаем дополнительные построения.
Построим пирамиду NMLKS. У которой NS=SL=LK=KN=6 (т.к. являются средними линиями соответствующих равных треугольников BCD, DCA, CAB, BCD).

Найдем высоту: $h=\sqrt{SL^2-\left(\frac{LN}{2}\right)^2}$, где $LN=a\sqrt{2}$.

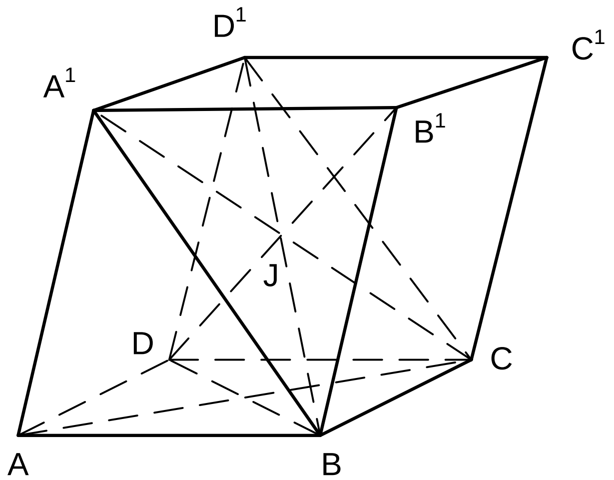
$$h=\sqrt{6^2-\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{144}{4}-\frac{72}{4}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

Найдем радиус, вписанной в квадрат NMLK окружности: $r=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}6=3.$

Найдем $V_{\text{конуса}}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\ \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 9\cdot 3\sqrt{2}=9\pi\sqrt{2}.$

Задача 2.5.

Все грани параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — равные ромбы. Углы BAD, BAA_1 и DAA_1 равны по 60°. Найдите угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1.



Решение. Все ребра данного параллелепипеда равны между собой, и так как его грани — ромбы с углом 60°, то меньшая диагональ в каждом ромбе равна его стороне. Отсюда следует, что DBB_1D_1— ромб.

Рассмотрим отрезок A_1J, гдеJ — точка пересечения диагоналей ромба DBB_1D_1. Треугольник DA_1B_1 равнобедренный, следовательно, медиана A_1J треугольника DA_lB_l является его высотой, то есть $A_1J \perp DB_1$. Аналогично, $A_1J \perp .D_1B$. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $A_1J \perp D_1BB_1$. Отсюда, угол между прямой BA_1 и плоскостью BDB_1 есть $\angle A_1BD_1$.

$A_1D = A_1B$, следовательно, $JD = DB$, как проекции равных наклонных. Отсюда следует, что $DB_1 = BD_1$. Итак, диагонали в ромбе DBB_1D_1 равны. Значит, ромб D_1DBB_1 — квадрат.

Треугольники BA_1D_1 и BDD_1 равны по трем сторонам, так как $BA_1 = BD$, $A_1D_1 = DD_1$ и DB_1 — их общая сторона. Отсюда
$\angle A_1BD_1 = \angle DBD_1 = 45°$.

Ответ: 45°.

Использованная литература.

1. Рязановский А.Р., Мирошин В.В. Математика. Решение задач повышенной сложности. М. Интеллект-Центр, 2008. Из серии: Готовимся к ЕГЭ.

2. Креславская О.А. Математика: Сдаем без проблем! М.: Эксмо, 2008.

3. www.ege.edu.ru - Демонстрационные варианты ЕГЭ за 2004,2005,2007,2007 годы.